A θετικά ορισμένος, $A=\bar{A}=A^t \Leftrightarrow \lambda_i>0$ για $i=1,\dots,n$

Προσαρτημένη - Συζυγής γραμμική απεικόνιση

V^n ευκλείδιος χώρος

$T: V\to V$ ενδομορφισμός

Ορίζω τον προσαρτημένο-συζυγή ενδομορφισμό του T να είναι ο ενδομορφισμός $T^*: V\to V$ ως εξής:

$<T(v),w> = <v,T^*(w)> \quad \forall v,w\in V$

πχ: $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και $T(x,y,z)=(0,x,y)$. Να βρεθεί ο T^*.

$<T(x,y,z),(\alpha,\beta,\gamma)> = <(x,y,z),T^*(\alpha,\beta,\gamma)>$ (1)

$<T(x,y,z),(\alpha,\beta,\gamma)> = <(0,x,y),(\alpha,\beta,\gamma)> = 0\alpha+\beta x+\gamma y \overset{(1)}{=}$

$= <(x,y,z),(\beta,\gamma,0)> = <(x,y,z),T^*(\alpha,\beta,\gamma)> \quad \forall (x,y,z)$ και (α,β,γ)

Άρα $T^*(\alpha,\beta,\gamma)=(\beta,\gamma,0)$

• **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Ο πυρήνας του T προσαρτημένου ενδομορφισμού T^* είναι ορθογώνιος προς την εικόνα του T.

* **Απόδειξη:** $T: V\to V \Rightarrow T^*: V\to V$

$\ker T, \ Im T - \ker T^*, \ Im T^*$

$\ker T=\{v\in V \mid T(v)=\vec{0}\}$ $\quad ImT=\{w\in V$ ώστε $\exists v\in V$ με $T(v)=w\}$

$\ker T^* = \{v \mid T^*(v)=\vec{0}\} = (ImT)^\perp \Leftrightarrow (\ker T^*)^\perp = ImT$

$(ImT)^\perp$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποχώρου ImT στον V. $V=ImT \oplus (ImT)^\perp$ και $(ImT)^\perp$ μοναδικά

$w\in\ker T^* \Leftrightarrow T^*(w)=\vec{0}$ $\quad <T(v),w> = <v,T^*(w)> = <v,\vec{0}>=0$

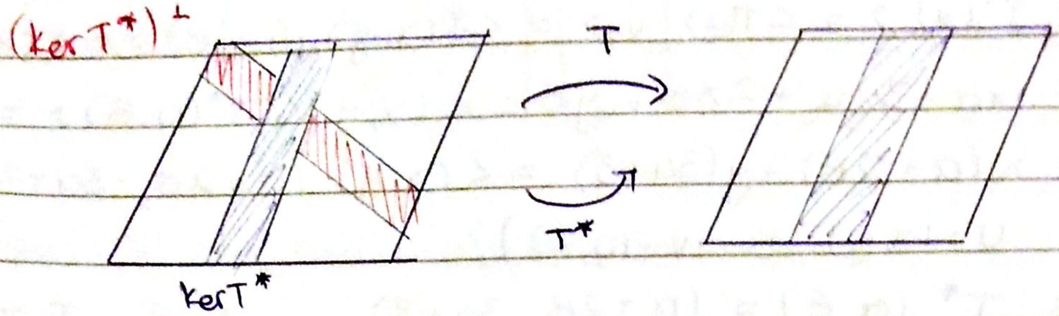
v τυχαίο. Δηλ. $<T(v),w>=0$. $\quad T(v)\perp w \Rightarrow w$ τυχαίο στον $\ker T^*$ και v τυχαίο $\Rightarrow$

$\Rightarrow T(v)\in(\ker T^*)^\perp \Rightarrow ImT \leq (\ker T^*)^\perp$. Θέλω ότι $ImT=(\ker T^*)^\perp$

Έστω $u\in(\ker T^*)^\perp$ τυχαίο $\Leftrightarrow u\perp w$ για όλα τα $w\in\ker T^*$

Θέλω $u\in ImT$. Υποθέτω ότι $u\notin ImT \Rightarrow u=T(z)+w'$ και $w'\in(\ker T^*)^\perp$

$\langle T(z), w' \rangle$ με $T(z) \in ImT \subseteq (\ker T^*)^{\perp}$ άρα $\langle T(z), w' \rangle = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow w' \in \ker T^* \Rightarrow w' \in (\ker T^*)^{\perp} \cap \ker T^* = \{\vec{0}\} \Rightarrow w' = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u = T(z) \Rightarrow (\ker T^*)^{\perp} = ImT.$



• **ΠΡΟΤΑΣΗ:** Αν ο $T^* : V \to V$ είναι ο προσαρτημένος του $T: V \to V$ με πίνακα B ως προς κάποια ορθοκανονική βάση κ' A ο πίνακας του T ως προς την ίδια βάση, τότε $B = A^t$.

* Απόδειξη: Έστω $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ μια ορθοκανονική βάση.
$T: V \to V$ έχει πίνακα A που δίνεται από:

$$\left.\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}v_n + a_{2n}v_n + \dots + a_{nn}v_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$T^*: V \to V$ έχει πίνακα B που δίνεται από:

$$\left.\begin{aligned} T^*(v_1) &= b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \dots + b_{n1}v_n \\ &\vdots \\ T^*(v_n) &= b_{1n}v_n + b_{2n}v_n + \dots + b_{nn}v_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, T^*(v_j) \rangle$ (1)

$\langle a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ni}v_n, v_j \rangle = a_{1i}\langle v_1, v_j \rangle + a_{2i}\langle v_2, v_j \rangle +$
$+ \dots + a_{ni}\langle v_n, v_j \rangle = a_{ji} \overset{(1)}{=} \langle v_i, b_{1j}v_1 + b_{2j}v_2 + \dots + b_{nj}v_n \rangle =$
$= b_{1j}\langle v_i, v_1 \rangle + b_{2j}\langle v_i, v_2 \rangle + \dots + b_{nj}\langle v_i, v_n \rangle = b_{ij}$

Δηλ. $b_{ij} = a_{ji}$, άρα $B = A^t$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Ένας ενδομορφισμός $T: V \to V$ σε έναν ευκλείδιο χώρο θα καλείται αυτοπροσαρτημένος ή αυτοσυζυγής, αν $T = T^*$. Δηλ. $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle$ $\forall v, u \in V$. O T θα είναι αυτοπροσαρτημένος αν ο πίνακας του ως προς κάποια ορθοκανονική βάση είναι συμμετρικός.

πχ 1) Να βρεθεί ο προσαρτημένος του $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, όταν $T(x,y) = (x+3y, 2x+y)$, $T^*: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

$$\langle u, T^*(v) \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle T(x,y), (a,b) \rangle = \langle (x+3y, 2x+y), (a,b) \rangle$$
$$= xa + 3ya + 2xb + yb = \langle (x,y), T^*(a,b) \rangle =$$
$$= x(a+2b) + y(3a+3) = \langle (x,y), (a+2b, 3a+3) \rangle$$
(με $u=(x,y)$ και $v=(a,b)$)

Άρα $T^*(a,b) = (a+2b, 3a+3)$, άρα $T \neq T^*$

$T(a,b) = (3b+a, 2a+b)$

2) Να βρεθεί ο προσαρτημένος του $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, όταν $T(x,y,z) = (x-y+z, x+y, z-x)$. $T^*(x,y,z) = ;$

Ως προς την κανονική βάση ο πίνακας του T είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας του T^* θα είναι: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$T^*(x,y,z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x+y \\ x+z \end{pmatrix}^t$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

• Πρόβλημα: 1) Έστω η παράσταση $2x^2+3xy-7y^2$ με $x,y \in \mathbb{R}$

- Έχει μέγιστο ή ελάχιστο η παράσταση; ΟΧΙ

• Για $x^2+y^2=1$ έχει μέγιστο ή ελάχιστο;

$$f(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(2x + \frac{3}{2}y, \frac{3}{2}x - 7y\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= 2x^2 + \frac{3}{2}yx + \frac{3}{2}xy - 7y^2$$

• Πρόβλημα 2) $x^2+7y^2-3z^2+4xy-2xz+6xz$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&7&3\\-1&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Έστω V δ.χ. πεπερασμένης διάστασης.

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ μια βάση του V. Μια τετραγωνική μορφή είναι μια συνάρτηση $Q: V\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$Q(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

Αν με A συμβολίσω τον πίνακα $A=(a_{ij})$ τότε η Q γίνεται:

$$Q(x_1v_1+x_2v_2+\dots+x_nv_n)=(x_1,x_2,\dots,x_n)\,A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

πχ: $Q(x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3)=(3x_1x_1+2x_1x_2+5x_1x_3+4x_2x_1-6x_2x_2-7x_2x_3+2x_3x_1-10x_3x_2+12x_3x_3)=$

$$=3x_1^2+6x_1x_2+7x_1x_3-6x_2^2-17x_2x_3+12x_3^2$$

$$A=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-6&-7\\2&-10&12\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&3&7/2\\3&-6&-17/2\\7/2&-7/2&12\end{pmatrix}$$

$$(x_1,x_2,x_3)\,B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3)\,A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Ο B διαγωνοποιείται, αφού είναι πραγματικός συμμετρικός

$$Q(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=(x_1,x_2,\dots,x_n)\,B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

Μπορώ να ορίσω τον συμμετρικό πίνακα $B=(b_{ij})$ ώστε:

- $b_{ii}=a_{ii}$ $\quad i=1,\dots,n$
- $b_{ij}=b_{ji}=\dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$ $\quad i\neq j$

B πραγματικός συμμετρικός $\Rightarrow\exists$ P ορθογώνιος (από ιδιοδιανύσματα) ξ Λ διαγώνιος (από ιδιοτιμές) ώστε $B = P\Lambda P^t$

$$Q(x_1v_1 + \dots + x_nv_n) = (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) P\Lambda P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$((x_1, \dots, x_n)P)^t = P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}$$

Αν $(x_1, \dots, x_n)P = (x_1', \dots, x_n')$ (2)

$$(x_1', \dots, x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 x_1', \dots, \lambda_n' x_n) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_n' \end{pmatrix} = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$$

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Q(x_1', \dots, x_n') =$$

• ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω η τετραγωνική μορφή $Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ με A πραγματικό συμμετρικό πίνακα. Ο A διαγωνοποιείται και οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Υπάρχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων με την οποία δημιουργώ τον ορθογώνιο πίνακα P ξ τον διαγώνιο $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$ με τις ιδιοτιμές. Η τετραγωνική μορφή Q μετασχηματίζεται στην $Q(x_1', \dots, x_n') = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$ όπου $(x_1', x_2', \dots, x_n') = (x_1, x_2, \dots, x_n)P$. Η $Q(x_1', \dots, x_n')$ καλείται η κανονική μορφή της Q. Τα $(x_1', \dots, x_n')$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $(x_1, \dots, x_n)$ στη νέα βάση, που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A

πχ: Να βρεθεί η κανονική μορφή της $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Θα διαγωνοποιήσω

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1) = (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$ άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ξ $\lambda_3 = 4$

Άρα $Q'(x',y',z') = 2(x')^2 + 2y'^2 + 4z'^2$

Πρέπει να βρω τον P ώστε να υπολογίσω τα (x',y',z')

• $V(2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z$

$V(2) = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (0,1,0) \rangle$

• $V(4)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y=0 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases}$

$V(4) = \langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$(x',y',z') = (x,y,z)\cdot P$

$x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}}$, $y' = y$,

$z' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}$